

MP
Physique · Modélisation · Chimie
2019

Sous la coordination de

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Louis SALKIN
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Arthur ALEXANDRE
ENS Paris-Saclay

Virgile ANDREANI
ENS Ulm

Jérôme DIDIER
professeur en CPGE

Vincent FREULON
professeur en CPGE

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Jérôme LAMBERT
enseignant-chercheur à l'université

Guillaume MAIMBOURG
professeur en CPGE

Tom MOREL
professeur en CPGE

Valentin RABAN
professeur en CPGE

Sommaire thématique de physique

2015 – 2019

Centrale MP Physique et Chimie 1	•	•	•	•	•		•••			••		••		••
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		••	•		••			••		••	••	•
Centrale PC Physique 1	•			••	•			••	••	••	••	••	•	•
Centrale PC Physique 2	••	•	•	••	•		••	••	••			••	••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•	•		••	••	••	••	•			••			
Centrale PSI Physique et Chimie 2	••	••			••	•	••	••	•	••	•			
Mines MP Physique 1	•	•			•		••			•	••			•
Mines MP Physique 2	••		••	••			••				••	•	••	
Mines PC Physique 1	•	•			•		••	••	•		••			
Mines PC Physique 2	••	•		•			••	••	••	••	•	•	••	
Mines PSI Physique 1	•	•			•		••	••	•		••			
Mines PSI Physique 2	•					•	•	•	•	•	••			
X/ENS MP Physique	••		•				••			•	•	•		
X/ENS MP Physique et SI	•	•			•		••			•	•	•	•	•
X/ENS PC Physique A	••				•		••	•		•	••	••	••	•
X/ENS PC Physique B				••			••	••		•	••			•
X/ENS PSI Physique	•	•		•	••	•	•			••	•			•
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•				••	••	••	••			•			
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnétostatique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique		

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUN INP			
Physique	Considérations sur une raie spectrale. <i>mécanique, intégration numérique, électromagnétisme, interférométrie, physique quantique, physique statistique</i>	11	29
Physique et Chimie	« S'il vous plaît... dessine-moi un mouton ! » <i>thermodynamique, mécanique, optique géométrique, solutions aqueuses, oxydoréduction, cinétique chimique, diagrammes E-pH</i>	49	65
CENTRALE-SUPÉLEC			
Physique et Chimie 1	Vie et mort d'un photon. <i>mécanique, physique quantique, ondes, électronique</i>	87	98
Physique et Chimie 2	Capture d'empreintes digitales. Stockage de déchets radioactifs. <i>optique géométrique, électromagnétisme, physique quantique, diffusion thermique, oxydoréduction</i>	115	127

MINES-PONTS

Physique 1	Physique en Arctique. <i>électromagnétisme, mécanique, diffusion thermique</i>	143	150
Physique 2	L'indice et le froid. <i>thermodynamique, optique ondulatoire, mécanique, électromagnétisme, physique statistique</i>	167	174
Chimie	Les batteries lithium-soufre. <i>cristallographie, oxydoréduction, thermodynamique</i>	191	199

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	La dynamique de l'Univers. <i>mécanique, gravitation, thermodynamique, effet Doppler</i>	209	222
Physique et Sciences de l'Ingénieur	Phénomène de reptation thermique. Interaction entre le pantographe d'un train et le système caténaire. <i>mécanique du solide (physique et SI), asservissements (SI)</i>	241	255

FORMULAIRES

Constantes chimiques	280
Constantes physiques	283
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2019

Centrale MP Physique et Chimie 1	•	•	•				•				
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	•	•	•••	•	••	••				
Centrale PC Chimie	•	••	••	•••	•••	••	••	••	•••	••	•••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•	•		•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•	•	•	•••	••	•	••				
Mines MP Chimie	•••	••		•••	•••	••	•••				
Mines PC Chimie	•••	••	••	••	•••	•	••		•••		
Mines PSI Chimie	•••	••		••	•••	••	•••	•			
X/ENS PC Chimie		•	•••	••			•••	•	•••	•••	•
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2019



MPPH008

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE**Vendredi 3 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de cinq parties indépendantes entre elles dans une large mesure : des références sont faites sur des résultats numériques établis dans des parties précédentes. De plus, certains résultats obtenus dans la **partie IV** peuvent être commentés dans la **partie V** à la lumière des nouveaux résultats numériques établis.

Pour les applications numériques, seuls les ordres de grandeurs (puissances de 10) sont attendus. Le candidat est invité à écrire explicitement le calcul en remplaçant bien toute expression littérale par les données numériques converties selon l'unité adaptée, avant de fournir l'ordre de grandeur du résultat, c'est-à-dire la puissance de 10 correspondante.

Des données comportant des valeurs numériques (déjà arrondies pour certaines) et des formules sont fournies en **pages 2 et 3**.

Considérations sur une raie spectrale

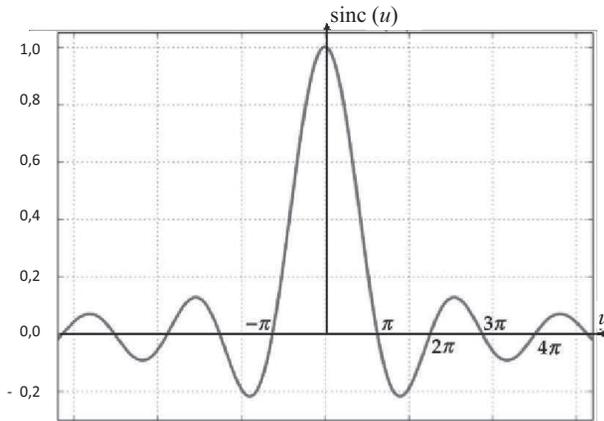
Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

- La permittivité du vide ϵ_0 est telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 10^{10} \text{ SI}$ et $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 2 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
- Constante de Planck : $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\varphi(x)$ associée à un quanton dans un état stationnaire d'énergie \mathcal{E} , de fonction d'onde $\psi(x,t) = \varphi(x) \cdot e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}$, soumis à l'énergie potentielle $V(x)$:
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x) \cdot \varphi(x) = \mathcal{E} \cdot \varphi(x)$$

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = k_B \cdot N_A = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire du Mercure Hg : $M_{\text{Hg}} = 200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Formule d'analyse vectorielle : pour un champ vectoriel \vec{A} on a
$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{A})) = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$
- La moyenne temporelle d'une grandeur $A(t)$ de période T_0 s'écrit :
$$\langle A \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A(t) dt$$

- Représentation graphique de la fonction « sinus cardinal » : $\text{sinc} : u \mapsto \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)$:



- Formule de trigonométrie : $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- $\sqrt{10^{-3}} \approx 3,2 \cdot 10^{-2}$; $\sqrt{10^3} \approx 3,2 \cdot 10^{+1}$
- Valeurs de certaines intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^{\pi} [\sin(\theta)]^3 d\theta = \frac{4}{3}$$

- Volume d'une boule de rayon R : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

CCINP Physique MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Ce long sujet se consacre à l'étude de phénomènes liés à plusieurs aspects de la physique de la lumière émise par une lampe spectrale. Il couvre une portion significative du programme et réussit à aborder, au cours de cinq parties relativement indépendantes, les chapitres de mécanique, modélisation numérique, électromagnétisme, physique quantique et physique statistique, ainsi que les notions théoriques et pratiques des TP consacrés à l'interféromètre de Michelson.

- La première partie ne contient qu'une seule question d'introduction.
- La seconde est une partie de mécanique et de modélisation numérique. Elle a pour but de déterminer les oscillations d'un électron ayant subi un choc dans un modèle de l'atome classique, celui de Thomson. Après avoir résolu le problème analytiquement, on demande curieusement de le résoudre numériquement, ou plutôt de commenter le code fourni.
- La partie suivante se consacre logiquement à l'étude du rayonnement de l'électron accéléré de la partie II. Très peu de calculs sont requis, les formules sont quasiment données. On aboutit à une estimation de la largeur naturelle d'une bande de lumière spectrale.
- La partie IV porte sur les chapitres de TP liés à l'interféromètre de Michelson monté en lame d'air. Là aussi, les questions sont classiques et proches du cours. La deuxième moitié de la partie étudie le brouillage lié à l'utilisation de plusieurs radiations de fréquences différentes, qui proviennent de la bande spectrale large. Elles permettent de mesurer expérimentalement la largeur de celle-ci.
- Enfin, la dernière partie étudie un autre phénomène qui tend à élargir une bande spectrale : l'effet Doppler causé par l'agitation thermique des atomes. On commence par redémontrer la formule du décalage de fréquence puis, à l'aide de considérations de physique quantique et de physique statistique, on l'applique aux atomes d'une lampe spectrale pour en déduire un ordre de grandeur de l'élargissement de la bande.

Le sujet est très guidé et de difficulté normale pour ce concours, à l'exception de quelques questions plus difficiles. En dépit de plusieurs erreurs d'énoncé, de notations redéfinies d'une partie sur l'autre et de calculs parfois fastidieux, il est relativement agréable à suivre, ne serait-ce que pour la surprise de découvrir qu'il est possible d'estimer de manière tout à fait élémentaire certaines grandeurs physiques a priori inaccessibles parce que trop courtes, trop rapides ou trop petites.

La nouveauté en CCINP MP, comme dans un nombre croissant de sujets depuis quelques années, est l'apparition d'applications numériques sans calculatrice. Ce sujet n'exige que l'ordre de grandeur du résultat, c'est-à-dire la puissance de 10 la plus proche. C'est très rapide : il suffit d'ajouter et soustraire les puissances de 10, et d'utiliser l'approximation $3 \cdot 3 \approx 10$. Pour des épreuves qui demandent plus de chiffres significatifs, il peut être utile d'apprendre à se servir d'une règle à calcul, rarement mentionnée dans les règlements et parfois même explicitement autorisée. On peut poser la question au directeur de la salle au début de l'épreuve pour être sûr.

En guise d'indication générale : feuillotez tout l'énoncé dès le début de l'épreuve, la réponse à une question est souvent donnée quelques paragraphes plus loin.

INDICATIONS

Partie II

- 5 La force est proportionnelle à la « déformation » OM.
- 6 L'intégration est exceptionnellement possible sans projection préalable. Ne pas tenter d'exprimer l'accélération en coordonnées sphériques.
- 8 Le dipôle oscille à la pulsation donnée par l'expression précédente. L'application numérique est à réaliser sans calculatrice : elle est demandée en puissance de 10 simplement, sans chiffre significatif.
- 10 Comme en question 6, l'intégration peut se faire vectoriellement.
- 11 On peut utiliser l'analogie avec l'énergie potentielle d'un ressort.
- 12 Ne prendre en compte que le mouvement d'oscillation ; le noyau est immobile.
- 14 L'équation différentielle donnée est visiblement erronée.
- 15 Il faut exécuter la fonction à la main et fournir son résultat, pas juste le décrire.
- 18 Comparer la valeur de ω apparaissant à la ligne 6 du code, et celle que l'on peut extraire du graphique. Comparer également la décroissance des deux courbes.

Partie III

- 20 Le plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges.
- 22 Penser à regarder les formules en annexe pour éviter de perdre du temps.

Partie IV

- 31 Le contraste est perdu si les interférences constructives d'une des radiations correspondent aux interférences destructives de l'autre au centre de la figure.

Partie V

- 40 L'équation en question est écrite dans les premières pages de l'énoncé.
- 41 On doit résoudre en partie l'équation différentielle, mais sans chercher les deux constantes d'intégration. La deuxième condition aux limites est la clé.
- 44 Différencier le résultat de la question 43.
- 46 Considérer que chacun des états d'énergie existant entre \mathcal{E} et $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ est accessible avec la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.
- 47 Il ne faut pas oublier qu'un formulaire contient quelques calculs d'intégrales.
- 48 Par définition, $\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} d\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

CONSIDÉRATIONS SUR UNE RAIE SPECTRALE

I. PRÉAMBULE

1 La relation de Planck lie l'énergie E transportée par un photon à sa longueur d'onde ν : $E = h\nu$. Ici, par conservation de l'énergie, E est égale à la différence d'énergie de l'atome $\mathcal{E}^* - \mathcal{E}_1$. Par ailleurs, on a $\omega = 2\pi\nu$, soit

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar} (\mathcal{E}^* - \mathcal{E}_1)$$

II. OSCILLATIONS AU SEIN DE L'ATOME DE THOMSON

2 L'énoncé décrit une boule de rayon a et de densité uniforme ρ , dont la charge totale est e . On peut mettre en relation ces trois variables par

$$e = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

d'où

$$\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

On remarque que, malgré le prix Nobel qu'il a valu à son concepteur, le célèbre modèle du pudding de Thomson est faux. Il n'a fallu que cinq ans pour que Rutherford démontre, avec sa non moins célèbre expérience de la feuille d'or, que le noyau positif est très petit. Les phénomènes décrits dans cette partie ne souffrent cependant pas des erreurs de ce modèle.

3 Tout plan passant par O et M est un plan de symétrie de la distribution de charges, et contient donc le champ électrique en M. L'intersection de deux de ces plans distincts étant l'axe radial, on a

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

De plus, les invariances de la distribution de charges par rotation autour de O permettent d'établir que le champ ne dépend ni de θ , ni de φ . Finalement,

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

4 On considère comme surface de Gauss une sphère \mathcal{S} centrée en O et de rayon r . Le théorème de Gauss s'écrit sur cette surface

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où Φ est le flux de \vec{E} au travers de la surface de Gauss et Q_{int} la charge qu'elle renferme. Sur toute la surface, \vec{E} est aligné avec $d\vec{S}$, de norme constante; le flux est donc maximal et égal à $E_r(r) \mathcal{S}$. Ainsi,

$$\Phi = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Quant à Q_{int} , c'est l'intégrale de ρ sur le volume contenu dans la surface de Gauss :

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Par conséquent,

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0}$$

Avec la question 2,

$$\vec{E}(M) = \frac{r e}{4 \pi \varepsilon_0 a^3} \vec{e}_r$$

5 L'électron n'est soumis qu'à la force électrostatique

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -e \vec{E}(M) \\ &= -\frac{r e^2}{4 \pi \varepsilon_0 a^3} \vec{e}_r \\ \vec{F} &= -m_e \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 a^3 m_e} r \vec{e}_r \end{aligned}$$

soit

$$\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OM} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 a^3 m_e}}$$

D'un point de vue dimensionnel, \vec{F} est bien homogène à une force : avec la formule $\vec{F} = m \vec{a}$ en tête, on reconnaît dans $\omega_0^2 \overrightarrow{OM}$ la dimension d'une accélération qui, multipliée par une masse, est bien une force. Cette force, proportionnelle et opposée à l'éloignement de M par rapport à O, correspond à un **rappel élastique**. On doit pouvoir alors retrouver un comportement d'**oscillateur harmonique**, d'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

dont ω_0 est la pulsation propre.

6 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel de l'atome, supposé galiléen :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r}$$

Cette équation harmonique homogène admet comme solution générale

$$\vec{r} = \vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t)$$

Avec $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = -V_0 \vec{e}_z$, on obtient

$$\vec{r}(t) = -\frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_z$$

Cette résolution vectorielle est grandement facilitée par la condition initiale $\vec{r} = \vec{0}$, qui permet d'obtenir $\vec{A} = \vec{0}$. Sans cela, il s'agit d'un problème en trois dimensions dont la solution, loin d'être triviale, demande de déterminer l'accélération en coordonnées sphériques, ce qui est hors-programme. On pourra néanmoins noter dans ce cas qu'il s'agit d'une force centrale.

CCINP Physique et Chimie MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Arthur Alexandre (ENS Paris-Saclay) et Alexandre Herault (professeur en CPGE); il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université), Émilie Frémont (professeur en CPGE) et Augustin Long (professeur en CPGE).

Ce sujet de physique-chimie, qui a pour thème le mouton, comporte quatre parties indépendantes. Les deux premières constituent la partie physique de l'épreuve. On y développe différents modèles afin de comprendre certains phénomènes comme le fait que les moutons se regroupent en troupeau pour supporter les basses températures. Les deux dernières parties constituent l'étude chimique.

- La première partie s'intéresse au maintien de la température d'un mouton. Après une première sous-partie consacrée à la diffusion thermique, le sujet se concentre sur la modélisation de l'équilibre et du déséquilibre thermique d'un mouton avec son environnement. Une dernière sous-partie aborde une conséquence de ces propriétés thermiques à travers la disposition des moutons dans un troupeau exposé au froid.
- La deuxième partie, très courte, aborde brièvement deux des sens du mouton : l'ouïe et la vue. Des modèles de l'oreille et de l'œil du mouton y sont présentés.
- La troisième partie étudie la composition et les qualités d'un lait de brebis. C'est la chimie des solutions aqueuses qui est utilisée ici : on aborde dans un premier temps le protocole de dosage du lactose par la méthode de Bertrand, puis on détermine la fraîcheur d'un lait en dosant l'acide lactique issu de la dénaturation du lactose.
- La quatrième et dernière partie, qui traite de l'hygiène et de l'entretien des bergeries, est composée de trois petites sous-parties. On s'intéresse d'abord à l'eau de Javel par l'intermédiaire du diagramme potentiel-pH du chlore. Puis on réalise une rapide étude cinétique de la décomposition de l'eau oxygénée en solution aqueuse. On termine par une étude thermodynamique en rapport avec la fabrication de la chaux dont on recouvre les murs pour les désinfecter.

Ce sujet, de difficulté modérée, est très efficace pour réviser dans son ensemble le cours portant sur les transferts thermiques. Il fait appel, dans une moindre mesure, à des notions de mécanique et d'optique. Les questions de chimie posées sont très classiques et en rapport direct avec le cours. Notons également la présence de nombreuses applications numériques. Cette épreuve est un très bon entraînement pour la préparation de ce concours.

INDICATIONS

- 1 Retrouver la dimension de la conductivité en réalisant une analyse dimensionnelle de la loi de Fourier ou en étudiant l'unité de λ_{laine} .
- 2 Utiliser la loi de Fourier donnée à la question 1.
- 6 Définir la résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.
- 8 Prendre en compte les 6 résistances thermiques (à cause des 6 faces du parallélépipède) et déterminer si elles sont en série ou en parallèle.
- 11 Pour déterminer si les 3 résistances sont en série ou en parallèle, regarder les températures qui leur sont appliquées.
- 12 On se place en régime stationnaire et on considère que la puissance apportée par le métabolisme compense exactement les pertes énergétiques par transfert thermique et par sudation.
- 14.a Faire un bilan minutieux des puissances (transfert thermique, métabolisme, sudation) et déduire le signe de chaque puissance en déterminant si ces puissances sont cédées ou apportées au système considéré. Exprimer ensuite la puissance associée à la sudation en utilisant le résultat de la question 12.
- 14.b On reconnaît ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants que l'on peut résoudre.
- 14.c Il y a une coquille dans l'énoncé à cette question. La plage de température d'adaptation de la brebis non tondue est entre -8°C et 25°C d'après le document proposé au début du sujet.
- 17 Déterminer un montage électrique pour lequel on retrouve la même équation différentielle du 1^{er} ordre que celles obtenues aux questions 14.a et 16.
- 18 On pourra considérer le dioxygène comme étant un gaz parfait.
- 19 Comment varie la puissance thermique transférée vers l'air extérieur avec la surface de toison exposée ?
- 20 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au tympan puis à la membrane de l'oreille interne. Noter que x et x' ont des origines différentes.
- 21 Se contenter de l'équation différentielle relative à x' et la transposer en notation complexe.
- 24 Utiliser la formule de conjugaison de Descartes et les définitions du *punctum proximum* et du *punctum remotum*.
- 27 Le « lactosérum » utilisé dans le protocole est en fait le lait.
- 29 Laisse à l'air libre, on suppose que l'on dénature la totalité du lactose.
- 31 La lecture graphique ne suffit pas pour déterminer les potentiels standard. Il faut appliquer la relation de Nernst. On suppose que toutes les espèces dissoutes sont à la concentration C .
- 33 Penser à vérifier que les résultats expérimentaux confirment l'hypothèse d'un ordre 1.
- 35 Utiliser la loi d'Arrhenius.
- 38 Déterminer le signe de $\Delta_r G$ pour connaître l'évolution du système.
- 39 L'apport d'énergie permet de chauffer la roche entrante et de réaliser la réaction endothermique.
- 40 L'eau de chaux est une solution saturée de $\text{Ca}(\text{OH})_2$.

« S'IL VOUS PLAÎT... DESSINE-MOI UN MOUTON ! »

I. LA TEMPÉRATURE DU MOUTON

1 Retrouvons la dimension de la conductivité thermique λ en réalisant une analyse dimensionnelle de la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Déterminons tout d'abord la dimension du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q . Le flux thermique φ se définit par rapport à \vec{j}_Q de la manière suivante :

$$\varphi = \int \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

Le flux thermique ayant la dimension d'une puissance, on a $[\varphi] = \text{M L}^2 \text{T}^{-3}$. On en déduit la dimension de \vec{j}_Q grâce à l'équation précédente :

$$[\vec{j}_Q] = \frac{\text{M L}^2 \text{T}^{-3}}{\text{L}^2} = \text{M T}^{-3}$$

On peut alors déterminer la dimension de λ à l'aide de la loi de Fourier :

$$[\lambda] = \frac{\text{M T}^{-3}}{\Theta \text{L}^{-1}}$$

soit,

$$[\lambda] = \text{ML } \Theta^{-1} \text{T}^{-3}$$

On pouvait retrouver la dimension de λ en regardant l'unité de λ_{laine} donnée précédemment dans l'énoncé.

Attention à ne pas confondre T qui représente la dimension du temps avec la notation usuelle pour la température.

2 On suppose que la température ne dépend que de z et de t (on considère un problème unidimensionnel en négligeant les effets de bord). En appliquant la loi de Fourier, on obtient

$$\vec{j}_Q(z,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z,t) \vec{e}_z$$

Le vecteur \vec{j}_Q est **orienté suivant l'axe Oz**. Il dépend des variables z et t .

3 Appliquons le premier principe de la thermodynamique à une tranche d'épaisseur dz du parallélépipède entre les instants t et $t + dt$:

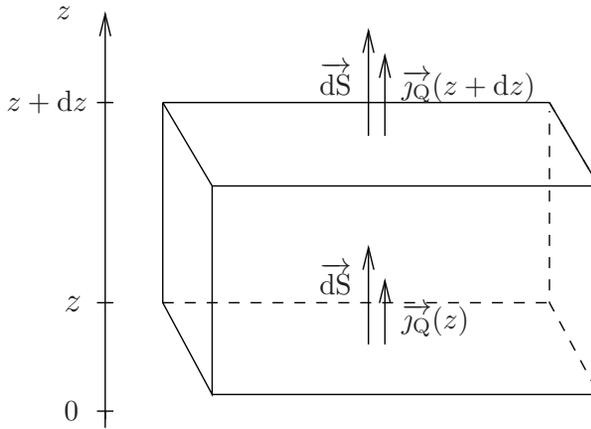
$$U(t + dt) - U(t) = \delta W + \delta Q$$

Aucun travail n'est apporté ici, donc $\delta W = 0$. D'autre part, on a

$$\delta Q = \varphi(z,t) dt - \varphi(z + dz,t) dt = \left(\iint \vec{j}_Q(z,t) \cdot d\vec{S} - \iint \vec{j}_Q(z + dz,t) \cdot d\vec{S} \right) dt$$

avec $d\vec{S}$ orienté suivant $+\vec{e}_z$.

On compte positivement l'énergie entrante en z et négativement l'énergie sortante en $z + dz$ (cf. schéma suivant).



Étant donné que \vec{j}_Q ne dépend ni de x , ni de y , on en déduit

$$\delta Q = LH \left(j_Q(z, t) - j_Q(z + dz, t) \right) dt = -LH \frac{\partial j_Q}{\partial z}(z, t) dz dt$$

On utilise à présent la loi de Fourier :

$$\delta Q = LH \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) dz dt$$

D'autre part, comme le système considéré est une phase condensée incompressible indilatable, on a

$$U(t + dt) - U(t) = c\mu \left(T(z, t + dt) - T(z, t) \right) LH dz = c\mu LH \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) dt dz$$

En substituant ces deux dernières expressions dans le 1^{er} principe, on obtient l'équation différentielle que vérifie T :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)}$$

On retrouve une équation de diffusion avec pour coefficient de diffusion

$$D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

4 En régime stationnaire, cette équation différentielle devient

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2}(z) = 0}$$

En intégrant une fois cette équation différentielle par rapport à z , on obtient

$$\frac{dT}{dz}(z) = a$$

avec $a \in \mathbb{R}$. La loi de Fourier s'écrit alors

$$\vec{j}_Q(z) = -\lambda \frac{dT}{dz}(z) \vec{e}_z = -\lambda a \vec{e}_z$$

On en déduit que \vec{j}_Q est **indépendant de z en régime stationnaire**.

Centrale Physique et Chimie 1 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Charlie Leprince (ENS Paris-Saclay) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à la détection non destructive de photons. Il est composé de trois parties indépendantes.

- Dans la première partie, on regarde les propriétés des atomes de Rydberg circulaires. Après avoir discuté de l'énergie potentielle d'interaction entre l'électron et le noyau, une première étude classique est réalisée. On détermine ainsi la valeur classique du rayon de l'orbite circulaire de l'électron. Ensuite, on détermine ces mêmes caractéristiques avec une étude purement quantique. Enfin, on finit par regarder le système de détection du photon. Les dernières questions sont essentiellement liées aux documents de l'énoncé. Toute cette partie repose sur des notions de mécanique classique de première année et de mécanique quantique de seconde année.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la cavité micro-ondes qui sert à piéger le photon. On calcule l'intensité maximale à l'intérieur de la cavité pour en déduire la durée de vie moyenne d'un photon dans cette cavité. On finit cette partie par l'étude d'un faisceau gaussien. Cette partie requiert essentiellement des notions de propagation des ondes.
- Le couplage entre un atome de Rydberg et la cavité est étudié dans la dernière partie, plus courte que les deux autres. On fait ici une analogie avec l'électrocinétique. La majorité des questions de cette partie peuvent être traitées dès la première année après le cours d'induction.

De longueur typique pour un sujet Centrale, l'épreuve fait appel à de nombreuses connaissances relatives aux cours sur la physique quantique et la propagation des ondes électromagnétiques. Intéressant et bien construit, ce sujet mélange des questions proches du cours, d'autres plus calculatoires, d'autres enfin qui demandent d'interpréter les expériences étudiées.

INDICATIONS

Partie I

- 3 Pour $r \rightarrow +\infty$, les électrons des couches inférieures font écran aux protons.
- 4 Déterminer la dimension de q à partir de l'expression de l'énergie potentielle.
- 9 Introduire l'expression de Ψ dans l'équation de Schrödinger puis diviser par $\Phi(M)\chi(t)$.
- 15 La probabilité de trouver l'électron dans le volume compris entre V et $V + dV$ s'écrit $dP = |\Psi(M, t)|^2 dV$.
- 25 Au bout d'un certain temps, le champ électrique atteint la valeur du champ d'ionisation de l'état $n = 51$ puis celui de l'état $n = 50$ un peu plus tard.

Partie II

- 28 En $z = d$, $\underline{s}_1(d, t) = r_M \underline{s}_0(d, t)$. De plus, on peut écrire

$$\underline{s}_1(z, t) = \underline{s}_1\left(d, t - \frac{d - z}{c}\right)$$

- 30 Le temps de vie moyen du photon dans la cavité s'écrit

$$\tau = \frac{(1 - R)d}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} n R^{n-1}$$

- 37 Calculer le rapport de surface S/S' où S est la surface des miroirs et S' celle liée à l'intensité lumineuse qui arrive sur le miroir en face en prenant en compte le phénomène de diffraction. Puis calculer le nombre de rebonds nécessaires pour diminuer l'intensité d'un facteur 1000.
- 39 La distance d' entre les deux miroirs correspond à p demi-longueurs d'onde.

Partie III

- 43 Faire un développement limité de $\omega_{\text{at/cav}}$ à l'ordre le plus bas non nul en δ/ω_0 .
- 44 Écrire les équations sous forme matricielle. Il existe des solutions non nulles si et seulement si le déterminant est nul.

VIE ET MORT D'UN PHOTON

I. ÉTUDE DES ATOMES DE RYDBERG CIRCULAIRES

1 La configuration électronique du rubidium est

$$\text{Rb} (Z = 37) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$$

Les électrons de valence sont les électrons de la couche externe et ceux des sous-couches non remplies. Le rubidium n'a qu'un seul électron de valence : celui de la couche 5s.

D'après sa configuration électronique, le rubidium appartient à la première colonne et la cinquième période : il s'agit d'un **alcalin**.

2 L'énergie potentielle électrostatique correspond à l'énergie d'interaction entre le noyau de charge positive et un électron de charge négative. Avec $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} U$, la force associée est donc attractive :

$$\text{L'énergie potentielle est bien négative.}$$

3 L'atome étant électriquement neutre, il y a autant de protons que d'électrons. Lorsque l'électron étudié est proche du noyau ($r \rightarrow 0$), il interagit uniquement avec les Z protons, d'où $Z(0) = Z$. Par contre, quand l'électron est suffisamment éloigné du noyau ($r \rightarrow +\infty$), les $Z-1$ électrons des couches inférieures font écran aux Z protons. La charge vue par l'électron est constituée de $Z - (Z - 1)$ protons, c'est-à-dire une particule chargée de charge $q = e$. Par conséquent, $Z(+\infty) = 1$.

4 La constante \hbar est en J.s : sa dimension est $M.L^2.T^{-1}$. D'après l'expression de l'énergie potentielle donnée dans l'énoncé,

$$[q] = [U] [r] = M.L^3.T^{-2}$$

L'équation aux dimensions s'écrit

$$L = (M.L^2.T^{-1})^\alpha . (M.L^3.T^{-2})^\beta . M^\gamma$$

On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 1 = 2\alpha + 3\beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -\beta + \gamma \\ 1 = -\beta \\ \alpha = -2\beta \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1 \quad \text{et} \quad \gamma = -1$$

Numériquement :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{q m_e} = 5,26 \times 10^{-11} \text{ m}$$

On retrouve l'ordre de grandeur typique de la taille d'un atome.

5 Plus le nombre quantique n est élevé, plus l'électron excité se situe sur une orbite éloignée du noyau. Pour $n \gg 1$, $r \gg a_0$ où r est la distance entre le noyau et l'électron. On peut alors écrire $Z(r) \simeq 1$. L'énergie potentielle devient

$$U(r) = -\frac{q}{r}$$

6 La force qui dérive de cette énergie potentielle est

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r = -\frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Cette force est centrale et conservative : le moment en O de cette force est nulle. Appliquons le théorème du moment cinétique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{0}$$

Le moment cinétique est constant.

$\vec{\mathcal{L}}$ garde alors toujours la même direction. De plus, le moment cinétique est orthogonal au vecteur position et au vecteur vitesse. **Le mouvement se fait toujours dans un plan** orthogonal au moment cinétique.

Comme $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \vec{e}_z$, le mouvement se fait alors dans le plan orthogonal, c'est-à-dire dans le plan Oxy . Utilisons les coordonnées polaires (r, φ) du plan Oxy . Le vecteur vitesse s'écrit alors

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

d'où

$$\vec{\mathcal{L}} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = m_e r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L} = m_e r^2 \dot{\varphi}$$

7 La force qui dérive de $U(r)$ est une force conservative : **L'énergie mécanique se conserve**. Celle-ci s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{q}{r}$$

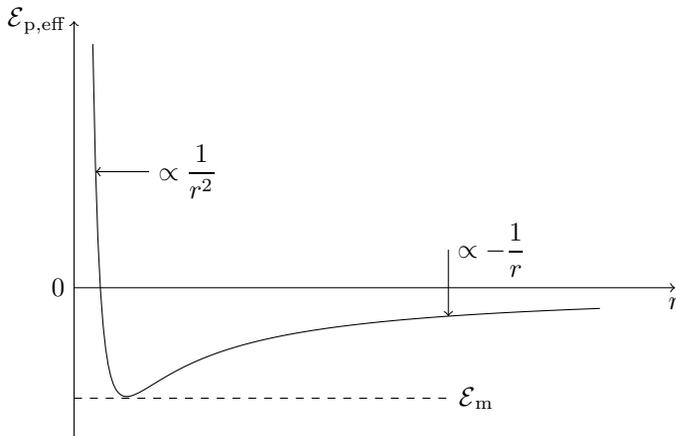
D'après la question précédente, le moment cinétique est constant et $\dot{\varphi} = \mathcal{L}/(m_e r^2)$. L'énergie mécanique devient

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$$

8 Traçons l'énergie potentielle effective en fonction de r :



Centrale Physique et Chimie 2 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (professeur en CPGE), Louis Salkin (professeur en CPGE) et Augustin Long (professeur en CPGE).

Ce sujet composé de deux parties indépendantes porte sur la capture d'empreintes digitales et le stockage de déchets radioactifs.

- La première partie est composée de trois sous-parties relativement indépendantes. Dans un premier temps, on étudie le système de détection de l'empreinte dans le cadre de l'optique géométrique. Ensuite, on caractérise le phénomène de réflexion totale à partir des lois de l'électromagnétisme. Une analogie quantique avec l'effet tunnel permet enfin d'exprimer les conditions d'apparition du phénomène de réflexion totale frustrée.
- La seconde partie étudie la radioactivité α . À partir d'une approche quantique, on exprime la durée de demi-vie de l'élément radioactif considéré. On s'intéresse ensuite aux aspects thermiques liés au stockage des déchets. La dernière sous-partie de ce problème traite de l'emprisonnement des produits de fission dans du verre en fusion. Ce verre est ensuite coulé dans les fûts de stockage. Les espèces à piéger, souvent des cations métalliques, sont actives du point de vue rédox et interagissent avec l'oxygène en fonction du potentiel du verre fondu. Cette partie de chimie étudie essentiellement le couple O_2/O^{2-} dans le but d'éviter la formation de bulles qui feraient mousser le verre en fusion. Ce couple est très présent dans le verre ; les ions oxyde en sont un constituant essentiel et le dioxygène provient de l'atmosphère présente au-dessus du verre en fusion. Les questions utilisent presque uniquement la relation de Nernst.

Cette épreuve de longueur raisonnable alterne questions proches du cours et raisonnements plus difficiles. Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

INDICATIONS

Partie I

- 1 On peut utiliser l'approximation des petits angles dans les conditions de Gauss.
- 6 La distance entre les images de chaque crête est $|\gamma|a$.
- 7 Pour $\gamma = -2$, si $e \ll |p|$, $e' \ll p'$.
- 8 Calculer le demi-angle au sommet du triangle formé par M_2 et la lentille puis vérifier si l'approximation des petits angles est valide.
- 11 Le doigt ne peut pas être éclairé s'il y a réflexion totale sur la face du prisme.
- 15 La relation de la question 14 est valable peu importe la valeur de x .
- 17 Exprimer les champs magnétiques incident, réfléchi et transmis.
- 19 Déterminer les signes possibles de k_{tz}^2 .
- 22 Il ne peut pas y avoir d'onde qui se propage vers les x décroissants pour $x \geq 0$.
- 27 Faire l'analogie entre l'expression de κ et le résultat de la question 19.

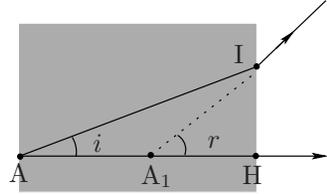
Partie II

- 30 La particule α fait un aller-retour de longueur $2R$ dans le puits pendant une durée $\tau = 1/f$.
- 38 Calculer $T(R)$ en utilisant la continuité du flux en $r = R$.
- 41 L'équilibre implique l'unicité des potentiels pour tous les couples.
- 42 Utiliser la relation de la question 41 pour remplacer la différence des potentiels standard par un terme dépendant de $f_{O_2}^*$ et $a(O^{2-})$.

I. CAPTURE D'EMPREINTES DIGITALES PAR RÉFLEXION TOTALE FRUSTRÉE

1 D'après la figure ci-contre,

$$\tan i = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \quad \text{et} \quad \tan r = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA_1}}$$



Dans les conditions de Gauss, on peut utiliser l'approximation des petits angles : $\tan i \simeq \sin i$ et $\tan r \simeq \sin r$. Or, la relation de Snell-Descartes s'écrit

$$n \sin i = \sin r$$

c'est-à-dire $n \tan i \simeq \tan r$. Avec les relations trigonométriques précédentes,

$$\boxed{\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}}$$

2 On a $p = \overline{OA_1}$ et $p' = \overline{OA'_1}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} D_1 &= \overline{A_1 A'_1} \\ &= \overline{A_1 O} + \overline{OA'_1} \\ D_1 &= -p + p' \end{aligned}$$

Avec la formule du grandissement $p' = \gamma p$,

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}}$$

Utilisons la formule de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1}$$

d'où

$$\boxed{f' = \frac{\gamma D_1}{-\gamma^2 + 2\gamma - 1}}$$

3 Pour un objet réel, $p < 0$ et pour une image réelle $p' > 0$. L'image est alors renversée sur l'écran :

$$\boxed{\gamma < 0}$$

On a
$$\frac{D_1}{f'} = -\gamma - \frac{1}{\gamma} + 2$$

Notons $g(\gamma)$ cette fonction. Sa dérivée vaut

$$g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$$

Par conséquent, $g'(\gamma) < 0$ si $\gamma < -1$ et $g'(\gamma) > 0$ si $\gamma > -1$.

Le rapport D_1/f' est donc borné inférieurement.

Le minimum est atteint pour $\gamma = -1$. En ce point, $D_1/f' = 4$, d'où

$$\boxed{f' \leq \frac{D_1}{4}}$$

4 D'après les questions 2 et 3, pour $\gamma = -2$, $p' = 2D_1/3$. Il vient

$$p' = 3f' \quad \text{et} \quad f' = \frac{2}{9} D_1$$

Déterminons la valeur numérique de D_1 . La relation de Chasles permet d'écrire

$$\begin{aligned} D &= \overline{AA_1'} \\ &= \overline{AA_1} + D_1 \\ &= \overline{AH} + \overline{HA_1} + D_1 \\ &= L + \frac{1}{n} \overline{HA} + D_1 \quad (\text{d'après la question 1}) \\ D &= L - \frac{1}{n} L + D_1 \end{aligned}$$

d'où
$$D_1 = D - L \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 9 \text{ cm}$$

Par conséquent,
$$\boxed{p' = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad f' = 2 \text{ cm}}$$

5 Reprenons l'expression de f' obtenue à la question 2 et développons-la :

$$\gamma^2 - \left(2 - \frac{D_1}{f'} \right) \gamma + 1 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant Δ vaut

$$\Delta = \frac{D_1}{f'} \left(\frac{D_1}{f'} - 4 \right) \geq 0$$

Les deux solutions sont
$$\gamma_{\pm} = 1 - \frac{D_1}{2f'} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

D'après ces expressions, on ne garde que γ_- car $|\gamma_+| < 1$, ce qui n'est pas attendu.

$$\boxed{\text{On doit diminuer } f' \text{ pour augmenter } |\gamma|.$$

En diminuant trop la valeur de la distance focale f' , on augmente les aberrations géométriques.

6 Pour distinguer deux crêtes successives sur le capteur CCD, les positions des images de chaque crête doivent se situer sur deux pixels différents. À travers la lentille, la distance entre les deux images est $|\gamma|a$. Il faut alors vérifier

$$\boxed{|\gamma|a > \ell_c}$$

On doit donc prendre un pixel de largeur ℓ_c telle que

$$\boxed{\ell_c < 200 \text{ } \mu\text{m}}$$

7 Appliquons la relation de conjugaison de Descartes au couple (M_2, M_2') :

$$\frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} = \frac{1}{f'}$$

D'après la valeur numérique de γ , on peut supposer que si $e \ll |p|$, $e' \ll p'$. Développons alors la relation précédente à l'ordre le plus bas non nul en e/p et e'/p' :

$$\frac{1}{p'} \left(1 + \frac{e'}{p'} \right) - \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e}{p} \right) \simeq \frac{1}{f'}$$

Mines Physique 1 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE); il a été relu par Arthur Alexandre (ENS Paris-Saclay) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet est l'association de plusieurs exercices dont le fil conducteur est l'étude de phénomènes physiques observables en arctique.

- La première partie débute par la description du champ magnétique terrestre. On exploite les informations qui peuvent être extraites qualitativement, puis quantitativement, de l'observation du mouvement de l'aiguille d'une boussole. Un modèle dipolaire est ensuite proposé pour modéliser ce champ. On cherche à calculer le moment magnétique de la Terre et à exprimer, en un point de sa surface, l'angle entre le vecteur champ magnétique et le méridien local. Puis on s'interroge sur le lien entre la rotation propre de la Terre et l'existence de ce champ magnétique. C'est l'induction magnétique qui assure ce couplage. L'entraînement mécanique est décrit par le moment des forces de Laplace. On établit les équations électrique et mécanique couplées qui régissent ce phénomène. S'ensuit une discussion sur la détermination et la stabilité des points de fonctionnement de cette dynamo auto-entretenu.
- C'est l'étude du mouvement d'un traîneau tracté par un attelage sur la banquise qui ouvre la partie suivante. On s'intéresse plus particulièrement à l'effet du frottement solide entre la neige et le traîneau lors de sa mise en mouvement, pour gravir une faible pente, accélérer sur une surface horizontale ou encore négocier un virage. Cette partie se poursuit par l'étude de la croissance de l'épaisseur de la banquise. L'approche choisie est originale : on ramène l'étude à une association de résistances et d'une source de courant thermiques. L'équation différentielle donnant l'évolution de l'épaisseur de glace est obtenue en appliquant la loi des nœuds en terme de températures. Sa résolution fait appel à la méthode de séparation des variables.

De difficulté modérée, cet énoncé balaie de larges parties du programme. Il est proche du cours et peu calculatoire. Avec un minimum d'entraînement, les quelques applications numériques sont aisément réalisables sans calculatrice.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Invoquer le théorème scalaire du moment cinétique. Reconnaître une équation d'oscillateur harmonique dans la limite des petits angles. Relier la pulsation propre intervenant dans l'équation à la période des oscillations.
- 3 Utiliser le formulaire. Décomposer le vecteur \vec{e}_z sur les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 4 Que vaut θ (ou λ) à l'équateur ? à chaque pôle ? Exprimer la norme de \vec{B} aux pôles en fonction de celle à l'équateur.
- 5 Sur un schéma, placer un point sur chaque hémisphère, les vecteurs \vec{B} et \vec{e}_N en ces points. Les lignes de champ de \vec{B} sont orientées dans le même sens que \vec{M} . Relier \vec{e}_N et \vec{e}_θ , puis exprimer $\tan D$ à l'aide des projections de \vec{B} sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- 6 Un argument de symétrie permet de trouver la direction de $\vec{B}(P)$. La règle de la main droite permet de trouver le sens de \vec{B} en fonction de celui de i et d'en déduire le signe de M_a et M_b . Exprimer d'abord le flux de $\vec{B}(P)$ à travers un élément de surface du disque sous forme d'un produit scalaire en prenant garde à la convention d'orientation du vecteur surface. Intégrer ensuite sur tout le disque. Attention à la convention d'orientation imposée pour i .
- 8 La somme des puissances de Laplace et de la f.e.m. est nulle (couplage parfait).
- 9 Représenter le schéma électrique équivalent et appliquer la loi des mailles. Écrire le théorème scalaire du moment cinétique.
- 10 Dériver \mathcal{H} par rapport au temps, puis injecter les deux équations de la question 9. Pour le calcul du gradient, il faut voir i et ω comme des coordonnées x et y .

Partie II

- 12 Considérer un élément de corde situé entre x et $x + 2dx$. Lister les actions mécaniques et appliquer le principe fondamental de la dynamique.
- 13 Projeter le théorème de la résultante dynamique sur l'axe dirigeant le mouvement et l'axe perpendiculaire au sol. Utiliser la loi de Coulomb pour le glissement et chercher à exprimer la réaction tangentielle sous la forme $\mu'_d Mg$.
- 14 Procéder de manière analogue à la question précédente. Cette fois, c'est la loi de Coulomb pour l'adhérence qui permet de répondre.
- 15 Le théorème de la résultante dynamique permet d'obtenir une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, en v , qu'il faut intégrer. À l'instant t_1 , $v(t_1) = 0,95 v_0$. Remarquer que $5\% = 1/20$.
- 16 Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète et s'exprime en fonction de la vitesse et du rayon du cercle. Exprimer $\tan \theta$ et exploiter la relation $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.
- 20 Attention, \mathcal{P}_u est une puissance surfacique.
- 21 Procéder en deux temps : établir le schéma équivalent en l'absence de changement d'état, puis ajouter les source et dipôle qui modélisent ce changement d'état. L'expression de Φ s'obtient en raisonnant sur une masse élémentaire d'eau qui change d'état durant dt et libère l'enthalpie de changement d'état associée.
- 22 Utiliser la loi des nœuds en terme de températures (prendre garde aux signes). Éliminer un des termes pour traduire la différence d'ordre de grandeur. La méthode de séparation des variables permet de démontrer la relation entre z_g et t .
- 23 Approximer la relation obtenue à la question précédente pour $z_g \gg \ell_g$ et $z_g \ll \ell_g$.

PHYSIQUE EN ARCTIQUE

I. PÔLES GÉOGRAPHIQUES ET MAGNÉTIQUES

1 Assimilons l'aiguille aimantée à un dipôle magnétique de moment \vec{m} . D'après le formulaire, son énergie potentielle dans le champ magnétique terrestre \vec{B} est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Ainsi, l'aiguille aimantée tend à s'aligner dans le même sens que les lignes de champ du champ \vec{B} terrestre, ce qui **minimise l'énergie potentielle** de la boussole. Comme les lignes de champ du champ magnétique terrestre \vec{B} sont orientées du pôle Sud géographique vers le pôle Nord géographique, **à l'équilibre, le moment magnétique de la boussole s'oriente selon la direction Nord-Sud perpendiculairement à l'axe (Δ) en pointant vers le Nord géographique**. Cette position est une position d'équilibre **stable** puisqu'elle correspond à un **minimum d'énergie potentielle**.

On peut aussi justifier la stabilité en remarquant que si on écarte l'aiguille de sa position d'équilibre, le couple magnétique l'y ramène, ce qui caractérise une position d'équilibre stable.

2 Appliquons le théorème scalaire du moment cinétique à l'aiguille de la boussole en rotation autour de l'axe (Δ) orienté par le vecteur \vec{e}_r , dans le référentiel du sol, supposé galiléen :

$$I\ddot{\alpha} = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r$$

avec $\alpha = \widehat{(\vec{B}_N; \vec{m})}$ où \vec{B}_N est la composante de \vec{B} normale à l'axe (Δ). Il vient

$$I\ddot{\alpha} = -mB_N \sin \alpha$$

soit encore
$$\ddot{\alpha} + \frac{mB_N}{I} \sin \alpha = 0$$

À la limite des petits angles, $\sin \alpha \simeq \alpha$ et l'équation précédente conduit à une équation d'oscillateur harmonique dont la période τ_{osc} vérifie

$$\frac{mB_N}{I} = \left(\frac{2\pi}{\tau_{\text{osc}}} \right)^2$$

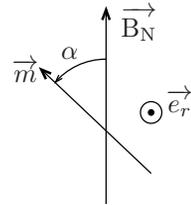
d'où

$$B_N = \frac{4\pi^2 I}{m \tau_{\text{osc}}^2}$$

La connaissance de I , m et τ_{osc} permet de **déterminer la composante du champ magnétique normale à l'axe (Δ)** de rotation de l'aiguille.

L'énoncé désigne τ_{osc} comme la « pseudo-période » et indique que le frottement au niveau de la liaison pivot est « faible ». Cela peut suggérer de prendre en compte le moment de la liaison sous la forme $-h\dot{\alpha}$ (frottement visqueux). Dans ce cas, l'équation différentielle des petites oscillations s'écrit

$$\ddot{\alpha} + \frac{h}{I}\dot{\alpha} + \frac{mB_N}{I}\alpha = 0$$



En régime faiblement amorti, les solutions sont de la forme

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-ht/(2I)} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{mB_N}{I} - \left(\frac{h}{2I}\right)^2}$$

Pour un amortissement suffisamment faible ($h \ll mB_N$),

$$\frac{2\pi}{\tau_{\text{osc}}} = \Omega \simeq \sqrt{\frac{mB_N}{I}}$$

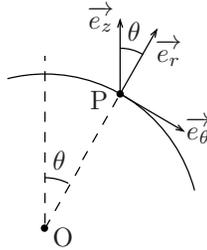
et on retrouve la même expression de τ_{osc} que dans le modèle sans frottement.

3 D'après le formulaire, le champ géomagnétique au sol s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 R_T \vec{e}_r (M_0 \vec{e}_z \cdot R_T \vec{e}_r) - R_T^2 M_0 \vec{e}_z}{R_T^5} \\ &= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[3 \vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) - \vec{e}_z \right] \end{aligned}$$

D'après la figure 7,

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$



Injectons cette décomposition de \vec{e}_z dans l'expression de \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \left[2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

4 À l'équateur, $\theta = \pi/2$ et $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$, d'où

$$\vec{B}_E = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$$

Puisque \vec{B}_E est orienté du pôle Sud géographique vers le pôle Nord géographique, \vec{B}_E et \vec{e}_z sont de même sens. Cela impose

$$M_0 < 0$$

Ce résultat traduit que le pôle Nord géographique correspond au pôle Sud géomagnétique. On devait s'attendre à ce résultat, car l'aiguille de la boussole présente spontanément son pôle Nord magnétique au pôle Sud géomagnétique, qui est donc situé au pôle Nord géographique.

D'après l'expression de \vec{B}_E ,

$$M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} = -\frac{(6 \cdot 10^6)^3 \times 3 \cdot 10^{-5}}{10^{-7}} = -8 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$$

Mines Physique 2 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Le sujet est constitué de deux parties totalement indépendantes et équilibrées.

- La première partie s'intéresse à la loi de Gladstone-Dale qui relie les variations de l'indice optique de l'air aux variations de la pression et de la température. Dans un premier temps, l'objectif est de mettre en place une méthode expérimentale de détection de la variation de l'indice optique en fonction de la pression. Cette variation étant faible, elle est détectée par interférométrie de Michelson. Ensuite, il s'agit d'établir un modèle physique permettant de rendre compte du phénomène. On établit la loi d'Ohm locale en régime harmonique à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié, puis l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu conducteur. Cette dernière fait apparaître une permittivité relative, qui est elle-même reliée à l'indice optique. Ainsi, les variations d'indice optique en fonction de la pression et de la température peuvent être reliées aux grandeurs physiques microscopiques du gaz.
- La seconde partie propose l'étude d'un système permettant d'obtenir de très basses températures dans des environnements extrêmes tels que l'espace. Pour ce faire, un système thermodynamique magnétisable est utilisé. Des dipôles magnétiques sont orientés par un champ magnétique extérieur. Le système est alors isolé thermiquement et le champ magnétique extérieur est diminué. Les dipôles vont alors perdre leur orientation et diminuer, par suite, la température du système isolé. C'est le processus de refroidissement par désaimantation adiabatique. Il faut ensuite à déterminer la distribution statistique en orientation des dipôles magnétiques afin d'en déduire l'aimantation. Enfin, les dernières questions proposent une étude thermodynamique permettant d'évaluer la température finale du système à la fin du processus de désaimantation.

Le sujet n'est ni long ni difficile, et il est énoncé clairement. Même si les processus mis en lumière ne sont pas au programme de prépa, la méthode de résolution proposée reste proche du cours. Dans chaque partie, les questions forment un ensemble relativement cohérent si bien qu'il est difficile de ne pas y répondre linéairement. Il constitue un bon sujet de révision à la portée de nombreux candidats. La seconde partie fait la part belle à la physique statistique, qui prend, année après année, une place plus importante dans les sujets de concours, en particulier en MP où son aspect calculatoire semble apprécié des jurys.

INDICATIONS

Partie I

- 3 La photodiode est au centre de la figure d'interférences. Le rayon lumineux d'intérêt est donc en incidence normale sur la cuve, si bien que la longueur du parcours dans la cuve est $2L$.
- 5 Pour prouver la négligeabilité de l'effet du champ magnétique, utiliser une équation de Maxwell permettant de lier la norme des champs électrique et magnétique.
- 6 Ne pas oublier que deux électrons par molécule sont optiquement actifs.
- 7 Déterminer la nature du filtre en étudiant les régimes hautes et basses fréquences.
- 9 On peut associer à l'équation différentielle obtenue une célérité v dans le milieu telle que $1/v^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r$.
- 10 L'équation des gaz parfaits permet de relier n^* à la pression et la température.
- 12 L'intensité s'écrit $I = -e/\tau$.

Partie II

- 14 Utiliser la normalisation de la probabilité P_k pour $k \in \llbracket -m ; m \rrbracket$.

15 On rappelle que

$$\langle X \rangle = \sum_k X_k P_k$$

- 16 L'ordre 1 ne permettant pas de conclure, le développement des tangentes hyperboliques doit être poussé à l'ordre 3.
- 18 On sera attentif au fait que les grandeurs sont volumiques.
- 19 Utiliser l'équation de Schwarz rappelée en fin d'énoncé.

L'INDICE ET LE FROID

I. VÉRIFICATION DE LA LOI DE GLADSTONE-DALE

1 On suppose que l'air considéré est dans des conditions de température et de pression telles qu'il peut être assimilé à un gaz parfait. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit usuellement

$$pV = \nu RT \quad (\text{avec } \nu \text{ la quantité de matière})$$

d'où

$$\rho = \frac{\nu M}{V} = \frac{pM}{RT}$$

D'après la loi de Gladstone et Dale, $n - 1$ est proportionnel à la masse volumique ρ . Ainsi, M et R étant constants,

$$n - 1 \propto \frac{p}{T}$$

Ainsi,

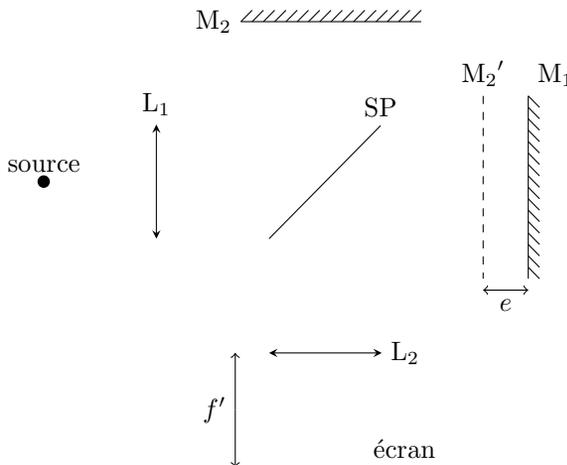
$$(n - 1) - (n_0 - 1) \propto \frac{p - p_0}{T}$$

d'où

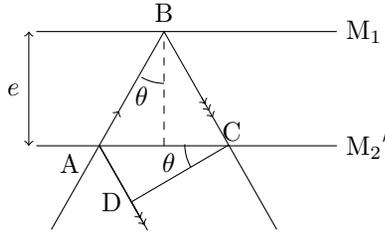
$$n - n_0 \propto \frac{p - p_0}{T}$$

À température constante, $n - n_0$ est donc proportionnel à la pression.

2 Un interféromètre de Michelson est représenté symboliquement sur la figure ci-dessous. On peut y voir les deux miroirs M_1 et M_2 , la lame séparatrice SP , la source, l'écran et les lentilles convergentes L_1 et L_2 . On se place en configuration lame d'air afin d'observer des anneaux à l'écran. Dans cette configuration, il convient que **la lentille L_1 fasse l'image de la source sur les miroirs**. Ainsi, la lumière en incidence sur les miroirs contient une large gamme d'angle d'incidence permettant de visualiser un grand nombre d'anneaux. Dans cette configuration, les interférences sont localisées à l'infini. Par conséquent, afin de les visualiser sur un écran, il convient de placer l'écran dans le plan focal image de la lentille L_2 . **La lentille L_2 va donc avoir pour rôle de projeter une image à l'infini à une distance finie égale à sa distance focale**.



Afin de modéliser plus facilement la situation, utilisons la représentation dite repliée de l'interféromètre.



Dans la figure ci-dessus, on fait l'image de M_2 par la séparatrice pour obtenir le miroir M_2' . Pour un interféromètre de Michelson en lame d'air, les miroirs M_1 et M_2' sont parallèles et séparés d'une faible distance e . En chaque point P de l'écran, ce sont les deux rayons issus d'un même rayon primaire qui vont converger. Par ailleurs, la lentille de projection L_2 ne modifie pas la différence de marche car il n'y a pas de différence de marche introduite entre deux fronts d'onde. Ainsi, les chemins optiques (CP) et (DP) sont identiques, si bien que la différence de marche δ s'écrit en fonction de l'angle d'incidence θ de la lumière sur les miroirs. On a

$$\delta = n_0 (AB + BC - AD)$$

Or

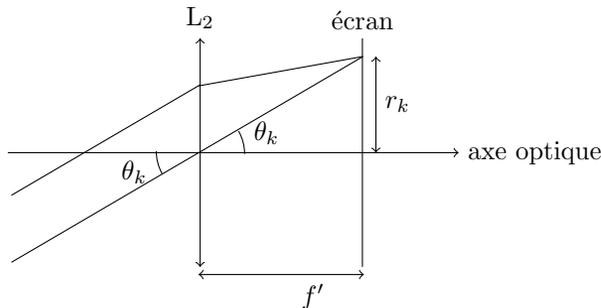
$$\begin{cases} AB = BC = \frac{e}{\cos \theta} \\ AD = AC \sin \theta = 2e \tan \theta \sin \theta \end{cases}$$

Ainsi,

$$\delta = 2e n_0 \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) = 2e n_0 \cos \theta$$

Notons θ_k l'angle des rayons à l'origine de l'anneau brillant de numéro k et r_k le rayon du k -ième anneau brillant, les anneaux étant comptés à partir du centre de la figure d'interférences. La lentille L_2 projette un rayon d'angle θ_k sur un cercle de rayon r_k à l'écran, si bien qu'on a, à partir de la figure ci-dessous,

$$r_k = f' \tan \theta_k \underset{\theta_k \ll 1}{\sim} f' \theta_k$$



Par ailleurs, au centre de la figure d'interférence $\theta_k = 0$, on peut écrire

$$\delta = \delta_0 = 2e n_0$$

En supposant l'anneau central brillant, le k -ième anneau brillant respecte la condition d'interférence constructive telle que

$$\delta_k = \delta_0 - k\lambda$$

Mines Chimie MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Margaux Galland (docteur en chimie) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet traite des batteries lithium-soufre qui font l'objet de développements depuis quelques années en raison d'une densité d'énergie théorique plus élevée que les traditionnelles batteries lithium-ion et d'un coût de production plus faible.

On commence par deux questions classiques sur les structures électronique et cristallographique du soufre. On conduit ensuite une étude de la décharge puis de la charge de la batterie.

Malheureusement, seule une petite moitié de l'épreuve correspond à ce que l'on peut attendre d'un candidat de la filière MP. L'étude globale est bien trop ambitieuse et peu en rapport avec la chimie étudiée en classes préparatoires, particulièrement dans cette filière. Le thème est certes intéressant mais si vous cherchez une épreuve d'entraînement, passez votre chemin ou contentez-vous de travailler sur les cinq, voire les dix, premières questions. Pas la peine d'aller plus loin en vue de progresser pour les concours.

INDICATIONS

- 1 L'anion le plus stable qui se forme correspond à la configuration électronique d'un gaz noble.
- 2 Il y a 16 unités S_k par maille.
- 3 Ne pas oublier que l'on forme le précipité, pas uniquement les ions. Relier la tension standard à $\Delta_r G^\circ$.
- 4 Raisonner en gramme de soufre et non pas en gramme de matériau de cathode. Deux moles d'électrons circulent par mole de soufre.
- 5 Calculer les volumes initial et final pour une mole de soufre en utilisant les masses volumiques.
- 6 Combien d'électrons sont échangés par atome de soufre sur toute la décharge ?
- 7 0,5 électrons sont échangés par atome de soufre pour le plateau 1, soit une charge totale de 4- pour les 8 atomes.
- 8 On peut utiliser la loi de Beer-Lambert. Ne pas oublier de réaliser une droite d'étalonnage.
- 10 La forme de la courbe traduit une formation puis une consommation de l'espèce. Relier cette évolution aux deux plateaux.
- 12 La dérivé de $[S_8]$ fait apparaître un terme de formation (plateau 1 dans le sens de la charge) et un terme de consommation d'ordre 1 sur le lithium.
- 13 Comparer la limite de l'expression obtenue en fonction de la concentration totale dans le cas où $f < 1$.
- 15 Il faut relier les valeurs r_1 et r_2 données à des distances entre atomes dans le tétraèdre. Il est pratique de déterminer le rapport entre le coté du tétraèdre (r_2) et la distance entre un sommet et le centre (r_1).
- 16 Exprimer le rapport entre les quantités de P et de S en fonction de x et déterminer les formules brutes correspondant aux trois situations envisagées, sachant qu'à chaque nouvelle connexion un atome de soufre appartient à deux tétraèdres.
- 20 Écrire l'équation de réaction entre l'électrolyte et le lithium, puis déterminer le signe de $\Delta_r G^\circ$ pour conclure sur la stabilité. N'ayant pas les entropies molaires, on se limite à la contribution enthalpique.

LES BATTERIES LITHIUM-SOUFRE

1 D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, la configuration électronique du soufre à l'état fondamental est

$$\boxed{\text{S}(Z = 16) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4}$$

Le soufre peut former l'anion S^{2-} en gagnant deux électrons pour arriver à une configuration isoélectronique du gaz noble qui le suit (l'argon) dans laquelle toutes les sous-couches sont totalement remplies.

2 Le volume d'une maille orthorhombique est $V = abc$. La masse volumique s'écrit

$$\rho = \frac{16 k \mathcal{M}_S}{\mathcal{N}_A abc}$$

soit

$$k = \frac{\rho \mathcal{N}_A abc}{16 \mathcal{M}_S}$$

Numériquement,
$$k = \frac{2,1 \cdot 10^6 \times 6 \cdot 10^{23} \times 1,3 \times 2,4 \times 10^{-27}}{16 \times 32}$$

soit, de manière approchée,

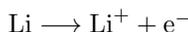
$$k \approx \frac{2 \times 6 \times 3}{16 \times 32} \cdot 10^2 \approx \frac{9}{8} \times \frac{100}{16}$$

d'où

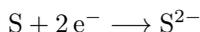
$$\boxed{k = 7}$$

Il faut être efficace sur les applications numériques sans calculatrice et ne pas avoir peur de faire des approximations. Ici, on ne garde que des valeurs entières et, pour le calcul final, il est clair que $9/8$ est légèrement plus grand que 1 et que $100/16$ est légèrement plus grand que 6, ce qui donne le résultat entier final. Il est possible de trouver une autre valeur selon la façon d'approximer et de simplifier le calcul sans calculatrice. Par exemple, trouver 6 ou 8 ne poserait pas du tout de souci (le calcul précis à la calculatrice donne 7,7) mais il convient de rester cohérent et de proposer au final une valeur entière.

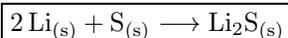
3 L'anode en lithium est oxydée selon la demi-équation électronique



alors que la cathode en soufre est réduite selon



Les ions lithium et sulfure précipitent et l'équation de la réaction de décharge s'écrit



La tension standard e° de la batterie est telle que

$$\Delta_r G^\circ = -2 \mathcal{F} e^\circ$$

car la réaction fait intervenir l'échange de deux électrons. Par ailleurs, on a

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

D'après la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Li}_2\text{S}) - 2 \Delta_f H^\circ(\text{Li}) - \Delta_f H^\circ(\text{S}) = -441 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par définition, $\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{Li}_2\text{S}) - 2 S_m^\circ(\text{Li}) - S_m^\circ(\text{S})$

Numériquement, $\Delta_r S^\circ = 63 - 2 \times 29,1 - 32,1 \approx -27 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

À 298 K, il vient donc

$$\Delta_r G^\circ = -441.10^3 + 298 \times 27 \approx -441.10^3 + 300 \times 30 = -432 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Par suite,
$$e^\circ = -\frac{\Delta_r G^\circ}{2\mathcal{F}} \approx \frac{432.10^3}{2.10^5}$$

Numériquement,
$$e^\circ \approx 2,2 \text{ V}$$

La tension standard des batteries lithium-soufre est assez nettement **inférieure** à la tension nominale des batteries lithium-ion.

4 N'ayant pas d'information sur la quantité de carbone conducteur présent dans la cathode, on conduit le calcul en raisonnant sur le soufre. On n'obtient donc pas un résultat par gramme de matériau de cathode comme le suggère l'énoncé mais par gramme de soufre dans le matériau de cathode.

D'après la stœchiométrie de la réaction de décharge, il circule 2 moles d'électrons par mole de soufre, si bien que

$$Q = n_{\text{elec}} \mathcal{F} = 2 n_S \mathcal{F}$$

soit, pour 1 g de soufre,
$$Q_m = \frac{2}{M_S} \mathcal{F}$$

Numériquement,
$$Q_m = \frac{2}{32} \cdot 10^5 \approx 6.10^3 \text{ C.g}^{-1}$$

1 C = 1 A.s donc 1 A.h = 3 600 C, ce qui donne finalement pour la capacité spécifique de la cathode (par gramme de soufre)

$$Q_m = \frac{6.10^3}{3600} \approx 1,7 \text{ A.h.g}^{-1}$$

Le matériau de cathode est ici **beaucoup plus efficace** que les matériaux typiques de cathode de batteries lithium-ion.

Il convient de nuancer ce résultat car la valeur numérique est par gramme de soufre dans la cathode et non pas par gramme de cathode (qui contient en plus du carbone)... La différence pourrait être beaucoup plus faible en tenant compte de la fraction massique du soufre dans le matériau. Cependant l'écart important avec les 300 mA.h.g⁻¹ laisse tout de même de la marge. Il faudrait que la fraction massique du soufre dispersé dans le carbone soit inférieure à 1/6^e pour retrouver une valeur de cet ordre de grandeur.

5 L'état totalement chargé correspond à 2 Li + S, l'état totalement déchargé à Li₂S, tout à l'état solide. Pour une mole de soufre, le volume initial est alors

$$V_i = 2 V(\text{Li}) + V(\text{S}) = 2 \frac{M_{\text{Li}}}{\rho(\text{Li})} + \frac{M_{\text{S}}}{\rho(\text{S})}$$

Numériquement,
$$V_i = 2 \times \frac{7}{0,53} + \frac{32}{2,1} \approx 28 + 16 = 44 \text{ cm}^3$$

X/ENS Physique MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Raban (professeur en CPGE) ; il a été relu par Romain Anankine (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet aborde un thème non étudié en CPGE mais passionnant par bien des aspects : la cosmologie, c'est-à-dire la science de l'Univers. Il se concentre plus particulièrement sur son expansion, qui a été mise en évidence pour la première fois par Edwin Hubble en 1929. Le texte et les questions, clairement construits comme un cours d'introduction à la discipline, suivent une progression pédagogique. Certaines notions étant plus techniques que d'autres, les six parties du sujet sont très inégales en longueur et en difficulté.

- Après une rapide introduction de l'effet Doppler, dont le décalage vers le rouge (*redshift*) en astronomie est une illustration, la première partie présente l'expansion de l'Univers afin d'introduire le paramètre d'échelle $a(t)$, qui est un objet central de la cosmologie.
- Dans la deuxième partie, on établit l'équation différentielle vérifiée par $a(t)$, dite de Friedmann-Lemaître, puis on l'interprète en la résolvant sur les deux cas particuliers d'un Univers vide et d'un Univers critique. Cette partie se termine par une rapide étude graphique des différentes solutions possibles selon la densité de masse dans l'Univers.
- La troisième partie, très courte, s'intéresse au rôle de la matière sur l'évolution de l'Univers, et introduit notamment le concept de matière noire.
- La partie 4, assez courte également, permet l'obtention d'une « équation d'état » générale à partir de la correspondance entre masse et énergie. On applique ensuite cette équation à la matière non relativiste.
- Dans la cinquième partie, on utilise la même équation, cette fois pour la matière relativiste. Cela permet de conclure que la matière « traditionnelle » (matière baryonique, matière noire, matière relativiste et rayonnement) ne peut expliquer à elle seule l'expansion de l'Univers observée par Hubble.
- La dernière partie montre comment, à partir de la mesure du *redshift* et d'une distance particulière dite « de luminosité », il est possible de déterminer les distances qui nous séparent d'objets célestes très lointains, à la fois à l'instant de l'émission et à celui de la réception du rayonnement. Il est ensuite indiqué que ces dernières permettent la mesure de l'accélération de l'expansion de l'Univers. Le sujet introduit finalement le concept d'énergie noire, dont la présence, bien que spéculative, est nécessaire pour rendre compte de l'expansion accélérée de l'Univers.

La cosmologie étant complètement absente du programme de CPGE, cet énoncé peut être utilisé pour tester efficacement sa capacité à s'approprier un sujet nouveau. Notons néanmoins qu'il fait peu appel au cours : on y rencontre seulement la démonstration de l'effet Doppler, une application du théorème de Gauss pour la gravitation et une utilisation du premier principe de la thermodynamique.

INDICATIONS

Partie 1

- 1.b Appliquer l'expression trouvée en 1.a à la période des ondes lumineuses.
 3 Traduire que la distance entre les galaxies O et O' est aussi sujette à l'expansion.

Partie 2

- 6 La galaxie est soumise uniquement à la force de gravitation $\vec{F} = m \vec{g}(\vec{r})$. Il faut déterminer $\vec{g}(\vec{r})$ par l'application du théorème de Gauss gravitationnel.
 7 Traduire que la masse se conserve.
 8 Insérer le résultat de la question 7 dans celui de la question 6. Ensuite, multiplier l'équation obtenue par \dot{a} pour l'intégrer.
 9 Évaluer la constante K en utilisant les conditions initiales.
 11 L'expansion s'arrête lorsque $\dot{a} = 0$.
 14.a L'expansion s'arrête lorsque $\frac{dx}{d\tau} = 0$.
 14.b Utiliser le résultat de la question 6.

Partie 4

- 17 Le principe cosmologique assure que la pression P et la densité volumique d'énergie interne u sont homogènes.
 18 Écrire que $\frac{du}{dr} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} \frac{du}{dt}$.
 19 Utiliser le résultat de la question 7.
 20 Appliquer l'équation (6) de l'énoncé à ρ_M .

Partie 5

- 24 Multiplier par a^2 puis dériver l'équation obtenue à la question 23 pour déterminer \ddot{a} . Commenter son signe.

Partie 6

- 25.b Remarquer que $d\chi < 0$ pour $dt > 0$.
 26.a Traduire que χ_A ne varie pas entre les deux émissions.
 26.d Le temps t_0 est l'instant présent : il joue le rôle du temps de réception, appelé précédemment t_2 . t_1 est l'instant d'émission, donc $t_1 < t_0$.
 26.e Raisonner sur les photons compris dans une sphère de rayon $r(t)$.
 29.a Remarquer que ρ_Λ ne dépend pas de $a(t)$.

LA DYNAMIQUE DE L'UNIVERS

1. HUBBLE : L'UNIVERS EST EN EXPANSION

1.a On considère l'émission par la galaxie A d'une impulsion lumineuse au temps t_0 . Notons $\ell = OA$ la distance entre les galaxies O et A à cet instant. Puisque la lumière voyage à la célérité c , cette impulsion arrive en O à

$$t'_0 = t_0 + \frac{\ell}{c}$$

L'impulsion suivante est émise au temps $t_1 = t_0 + T$. La galaxie A se trouve alors à une distance $\ell + vT$ de la galaxie O. Cette impulsion arrive donc en O à l'instant

$$t'_1 = t_1 + \frac{\ell + vT}{c}$$

Finalement, la période T' perçue par l'observateur est

$$\begin{aligned} T' &= t'_1 - t'_0 \\ &= t_0 + T + \frac{\ell + vT}{c} - t_0 - \frac{\ell}{c} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{T' = T \left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

On peut contrôler ce résultat en l'écrivant pour les fréquences

$$f' = \frac{f}{1 + v/c}$$

On voit que la fréquence reçue est d'autant plus petite que la vitesse est grande, ce qui correspond bien à l'expérience d'un camion de pompier qui s'éloigne d'un passant : plus le camion est rapide plus la sirène paraît grave.

1.b Puisque $\lambda = cT$ et $\lambda' = cT'$, on calcule en utilisant la relation précédente

$$\begin{aligned} \lambda' &= cT' \\ &= cT \left(1 + \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

Ce résultat est valable dans le cas où la source est non relativiste ($v \ll c$).

Dans le cas où $v \approx c$, il faut utiliser la cinématique relativiste (hors programme) pour résoudre le problème. On trouve alors

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Le développement limité de cette expression pour $v \ll c$ redonne bien sûr le résultat non relativiste.

1.c D'après la question 1.b,

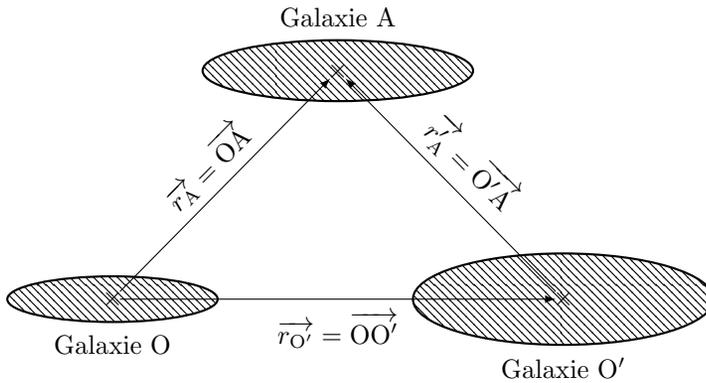
$$\boxed{z = \frac{v}{c}}$$

2.a H_0 a la dimension du rapport d'une vitesse sur une distance. Elle est donc homogène à **l'inverse d'un temps**.

2.b Les données de l'énoncé conduisent à

$$H_0 = 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

3 On considère les trois galaxies ci-dessous.



On suppose que la loi de Hubble est satisfaite pour des observations depuis la galaxie O. On a alors

$$\vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A \quad \text{et} \quad \vec{v}_{O'} = H_0 \vec{r}_{O'}$$

Calculons \vec{v}'_A la vitesse de A observée depuis la galaxie O'

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{O}'\vec{A}}{dt} &= \frac{d\vec{O}\vec{A}}{dt} - \frac{d\vec{O}\vec{O}'}{dt} \\ &= H_0 \vec{O}\vec{A} - H_0 \vec{O}\vec{O}' \\ &= H_0 \vec{O}'\vec{A} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{v}'_A = H_0 \vec{r}'_A$$

La loi de Hubble est donc aussi vérifiée depuis la galaxie O', **conformément au principe cosmologique**.

4 La loi de Hubble s'écrit $\vec{v}_A = H(t) \vec{r}_A$ soit

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = H(t) \vec{r}_A$$

En introduisant le paramètre d'échelle par $\vec{r}_A = a(t) \vec{\chi}$, on obtient, puisque $\vec{\chi}$ est un vecteur constant,

$$\dot{a}(t) \vec{\chi} = H(t) a(t) \vec{\chi}$$

et finalement

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2019

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Jérôme Didier (professeur en CPGE); il a été relu par Étienne Martel (ENS Paris-Saclay), Nicolas Courrier (professeur en CPGE), Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet est divisé en deux parties indépendantes. La première traite des lois de la friction.

- Dans un premier temps, on introduit les conditions de l'équilibre d'un solide le long d'un plan incliné à l'aide d'un modèle à deux points de contact. L'état d'adhérence de ces deux points est décrit à l'aide d'un diagramme d'état qui permet de déterminer si l'un des deux points, ou le solide, doit glisser ou non.
- La deuxième sous-partie fait appel à cette description pour décrire le phénomène de reptation thermique d'un solide soumis à des cycles de hausse et de baisse de la température. Cette étude, d'abord qualitative, modélise ensuite, à l'aide de ressorts, la charge accumulée au niveau des contacts.
- La troisième sous-partie est consacrée à la modélisation des lois d'Amontons-Coulomb à l'échelle microscopique. Elle fait intervenir la géométrie des contacts à cette échelle ainsi que la résistance des matériaux.

Cette partie nécessite une bonne compréhension du point particulier du programme de MP que constituent les lois du frottement solide. L'ensemble est d'un bon niveau et aborde plusieurs pistes très intéressantes pour décrire les conséquences et l'origine microscopique des lois phénoménologiques d'Amontons-Coulomb.

La seconde partie porte sur l'étude de l'interaction entre le pantographe d'un train et le système caténaire.

- La première sous-partie propose d'étudier la déformation du câble sous l'effet de son propre poids.
- La deuxième sous-partie se focalise sur le comportement dynamique du pantographe, notamment le comportement du contact entre le caténaire et le fil ainsi que l'influence de l'amortissement sur le décollement de ce dernier.
- La dernière sous-partie propose une modélisation du premier mode propre du pantographe, à travers l'étude de deux situations décrites dans le sujet.

Cette partie est longue et assez ardue, les questions II.7 et II.15 notamment sont très difficiles et bloquantes sur les quelques questions qui les suivent, tandis que les toutes dernières sont assez faciles et ne présentent pas grand intérêt. Ces passages difficiles sont d'une importance limitée pour les révisions, à l'inverse des autres questions, mais ils restent utiles pour la culture scientifique et pour comprendre cette thématique qui tombe souvent ces dernières années (deux sujets déjà l'an dernier en PSI).

INDICATIONS

Partie I

- I.6 Existe-t-il un unique couple d'états d'adhérence vérifiant les équations du mouvement ?
- I.7 Quels doivent être les états d'adhérence des deux contacts pour qu'il y ait glissement ?
- I.10 Les paramètres donnés par l'énoncé aux questions I.4 et I.5 ($q = 1/4$, $f = 1$ et $\tan \theta = 1/2$) ne permettent pas de résoudre cette question. Pourquoi ?
- I.11 Les ressorts sont orientés selon \vec{u}_x et transmettent la force appliquée par (1) sur les patins (1A) et (1B) selon ce vecteur. Il faut imaginer un élément parfaitement glissant associé à chaque couple de ressorts permettant de transmettre la composante des forces exercées par (1) sur les deux patins selon \vec{u}_z .
- I.14 Quelle amplitude thermique permet de passer d'une situation de glissement en A à une situation de glissement en B ?
- I.16 L'angle θ est choisi proche de l'angle de glissement de telle manière qu'une variation infinitésimale de T suffise à passer dans un état de glissement pour l'un des deux contacts.
- I.19 Comment varie R_G lorsque F augmente ? Quelle doit être sa valeur au seuil de glissement ?
- I.20 En l'absence de frottements, y a-t-il besoin d'appliquer une force F pour que le solide « descende » le long d'une dent ?
- I.24 Raisonner sur l'énergie d'adhésion en ne prenant en compte que les atomes de l'interface.

Partie II

- II.2 Cette question et la suivante utilisent les mêmes méthodes que pour la corde de Melde.
- II.4 Attention à l'orientation de l'angle.
- II.5 Il faut sommer les déflexions successives sur un demi-câble pour atteindre le point le plus bas et reconnaître pour cela des suites arithmétiques.
- II.7 Cette question est difficile car il faut trouver la relation $\ell_{\text{eq}} = z + h + \ell$ qui aurait mérité une question à elle seule. On peut l'admettre pour avancer et essayer de la démontrer dans un second temps.
- II.9 Distinguer deux cas selon la valeur de Q par rapport à 1.
- II.10 Il faut réutiliser des résultats démontrés à la question II.8.
- II.15 Cette question est très difficile. Il faut tout d'abord paramétrer le système car l'énoncé ne le fait pas, puis traduire les différents équilibres des points A et D, le second étant sans masse. On peut alors appliquer le principe fondamental au point A et procéder de la même façon qu'à la question II.7.
- II.19 Il faut refaire un bilan comme ceux déjà établis dans les questions II.7 et II.15, en étudiant les points A et B.

I. ÉTUDE DU PHÉNOMÈNE DE REPTATION THERMIQUE

I.1 Faisons un bilan des forces appliquées sur le solide parallélépipédique dans le référentiel, supposé galiléen, du plan incliné. On suppose que le solide (1) et la surface de (0) sont suffisamment réguliers pour que la résultante des forces de contact le long des arêtes passe par les points A et B situés au milieu de ces arêtes. Il en résulte que les forces appliquées sur le solide sont :

- la réaction du plan en A : $\vec{R}_A = T_A \vec{u}_x + N_A \vec{u}_z$;
- la réaction du plan en B : $\vec{R}_B = T_B \vec{u}_x + N_B \vec{u}_z$;
- le poids du solide $\vec{P} = m \vec{g}$ appliqué en son centre de masse G.

Le principe fondamental de la statique (PFS) appliqué au solide (1) donne

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P} = \vec{0}$$

Soit, en projetant sur les vecteurs \vec{u}_x et \vec{u}_z ,

$$\begin{cases} T_A + T_B - mg \sin \theta = 0 & \text{sur } \vec{u}_x \\ N_A + N_B - mg \cos \theta = 0 & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

Complétons le jeu d'équations décrivant le solide à l'équilibre en considérant le théorème du moment cinétique appliqué en A, point immobile dans le référentiel du plan incliné. En tenant compte des points d'application des forces, il vient

$$\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AA} \wedge \vec{R}_A + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

d'où l'on tire, en remplaçant chaque vecteur par ses composantes,

$$(2b \vec{u}_x) \wedge (T_B \vec{u}_x + N_B \vec{u}_z) + (b \vec{u}_x + a \vec{u}_z) \wedge (-mg \sin \theta \vec{u}_x - mg \cos \theta \vec{u}_z) = \vec{0}$$

En projection sur \vec{u}_y , $-2b N_B + mg(b \cos \theta - a \sin \theta) = 0$

Donc, avec $q = \frac{a}{b}$,

$$N_B = \frac{mg}{2} (\cos \theta - q \sin \theta)$$

Injectons ce résultat dans les expressions du PFS précédentes pour obtenir

$$N_A = \frac{mg}{2} (\cos \theta + q \sin \theta) \quad \text{et} \quad T_A + T_B = mg \sin \theta$$

I.2 Le solide est à l'équilibre s'il ne glisse pas et s'il ne bascule pas. Examinons d'abord la première condition. Le solide (1) ne glisse pas si au moins l'un des deux contacts A ou B ne glisse pas. Choisissons A pour le contact non glissant. D'après les lois de Coulomb, $T_A < f N_A$ tandis que $T_B = f N_B$ pour le contact B, puisque celui-ci est glissant. Sommons ces deux relations pour obtenir

$$T_A + T_B < f (N_A + N_B)$$

Choisir B comme le contact non glissant conduit au même résultat. Remplaçons les sommes des réactions tangentielles et normales par leurs expressions obtenues à la question précédente :

$$mg \sin \theta < f mg \cos \theta$$

soit

$$\tan \theta < f$$

On trouve le même résultat que pour un solide à un seul point de contact avec le support.

Le solide ne bascule pas tant que le contact en B n'est pas rompu, c'est-à-dire tant que $N_B > 0$. Ceci implique, d'après la question précédente, que

$$\frac{mg}{2}(\cos \theta - q \sin \theta) > 0$$

soit

$$\tan \theta < \frac{1}{q}$$

L'énoncé pose que $f < 1/q$. Il en résulte que **la condition de non-glissement est rompue la première lorsque θ augmente** et que le basculement du solide ne se produit jamais.

I.3 D'après la question I.1, $T_A + T_B = mg \sin \theta$

soit
$$N_A \frac{T_A}{N_A} + N_B \frac{T_B}{N_B} = N_A Z_A + N_B Z_B = mg \sin \theta$$

Substituons à N_A et N_B leurs expressions établies à la question I.1 :

$$\frac{mg}{2}(\cos \theta + q \sin \theta) Z_A + \frac{mg}{2}(\cos \theta - q \sin \theta) Z_B = mg \sin \theta$$

Factorisons cette expression par $(mg/2) \cos \theta$ pour obtenir

$$A(q, \theta) Z_A + B(q, \theta) Z_B = C$$

avec
$$A(q, \theta) = 1 + q \tan \theta \quad B(q, \theta) = 1 - q \tan \theta \quad \text{et} \quad C = 2 \tan \theta$$

D'après la question précédente, $\tan \theta < 1/q$, donc $A > 0$ et $B > 0$.

I.4 À q et $\tan \theta$ fixés, l'équation obtenue à la question précédente est celle d'une droite \mathcal{D} dans le plan $\mathcal{P}(O, Z_A, Z_B)$:

$$Z_B = -\frac{A}{B} Z_A + \frac{C}{B}$$

Pour $\tan \theta = 1/2$ et $q = 1/4$, on a $A = 9/8$, $B = 7/8$ et $C = 1$. La droite \mathcal{D} est représentée ci-dessous.

